ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 3 SEPTEMBRE 1917.

PRÉSIDENCE DE M. J. BOUSSINESQ.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

THÉORIE DES NOMBRES. — *Quelques propriétés des formes quadratiques binaires indéfinies* (¹). Note de M. G. **Humbert.**

1. Les formules qui vont être développées se rapportent toujours aux réduites principales (mod 2) indéfinies. Elles appartiennent à deux types. Dans le premier type, les premiers membres sont des nombres *algébriques* de réduites : les réduites principales de déterminant N y apparaissent partagées en deux catégories, et c'est la *différence* entre les deux nombres correspondants de réduites qui intervient. Aux seconds membres figure soit le nombre total des classes positives de déterminant — N, soit un nombre analogue algébrique. Quant aux formules du second type, on peut les regarder comme une extension aux formes indéfinies, la seule qui ait été proposée jusqu'ici à ma connaissance, des théorèmes de Kronecker sur les formes définies.

Les notations sont toujours celles de mes Notes précédentes.

2. Si l'on pose, avec Hermite (²),

$$B = 4\sum_{n=0}^{\infty} q^{n+\frac{3}{4}}(-1)^n a_n, \tag{1}$$

où $a_n = \sum{}'(-1)^{\frac{d-1}{2}}$, cette dernière somme portant sur les diviseurs, d, de $4n+3$, inférieurs à leurs conjugués, j'ai fait connaître (³), avec l'indi-

---

(¹) *Comptes rendus*, t. 165, 1917, p. 298.

(²) *Journal de Liouville*, 2ᵉ série, t. 9, p. 145; *Œuvres*, t. 2, p. 246.

(³) *Comptes rendus*, t. 158, 1914, p. 297.

cation de leur origine, les expressions de $B\eta_1$ et $B\theta\eta_1$:

$$(2) \qquad B\eta_1 = 4\sum_{N=1}^{\infty}{}'(-1)^N q^N \mathop{\mathrm{S}}_{4N}\left[(-1)^{\frac{m}{4}} - 1\right],$$

$$(3) \qquad B\theta\eta_1 = -4\sum_{h=1}^{\infty}{}' q^h \frac{1-q^{h^2}}{1-q^{2h}}(-1)^h . 2h.$$

Les suivantes dérivent d'une source analogue :

$$(4) \qquad B\theta_1 = 4\sum_{N=0}^{\infty}{}' q^{N+\frac{3}{4}} \mathop{\mathrm{S}}_{4N+3} (-1)^{\frac{1}{4}(m_1+m_2-m)},$$

$$(5) \qquad B\theta = \frac{1}{2}\eta_1^3 + 4\sum_{N=0}^{\infty}{}' q^{2M+1+\frac{3}{4}} \mathop{\mathrm{S}'}_{8M+7}\left[(-1)^{\frac{1}{4}\mu_1} + (-1)^{\frac{1}{4}\mu_2} - 1\right].$$

Dans ces formules, S a la même signification que dans ma dernière Note; S' porte sur les classes positives, de discriminant $8M + 7$ et de l'*ordre impropre;* μ_1 et μ_2 désignent les deux *minima* $\equiv 0 \pmod 4$ d'une de ces classes ($\mu_1 \leqq \mu_2$).

Indiquons encore le développement

$$(6) \qquad -\theta_1\chi(x)\frac{H_1(x)}{H(x)}$$

$$= \text{const.} + 4\sum_{N=1}^{\infty}{}' q^N \left\{ \mathop{\mathrm{S}}_{N} \cos mx + \mathop{\mathrm{S}''}_{N} \cos\mu x + \cos\mu' x + \cos\mu'' x \right\},$$

où la somme S'' porte sur les classes positives, de discriminant N et de l'*ordre impropre;* μ, μ', μ'' sont les trois minima d'une de ces classes.

Enfin, si $F(N)$ et $F_1(N)$ désignent, selon l'usage, les nombres des classes positives, de discriminant N, respectivement de l'ordre propre et de l'ordre impropre, la constante, au second membre de (6), a pour expression

$$4\sum_{N=0}^{\infty}{}' q^N [F(N) - 3F_1(N)],$$

avec $F(0) = 0$; $F_1(0) = -\frac{1}{12}$.

3. *Formules du premier type.* — Dans (5) et (4), remplaçons B par sa valeur (1); égalons ensuite les coefficients des mêmes puissances de q dans

les deux membres, et, au premier, introduisons les réduites principales indéfinies [1] par le procédé de ma dernière Note. Nous trouvons ainsi *trois* formules, car (5) en fournit *deux*, selon qu'on y considère les termes en $q^{M+\frac{3}{4}}$ ou en $q^{M+\frac{7}{4}}$. Pour simplifier nous poserons

$$H_1(n)=\sum_n^1\left(\frac{-1}{\beta}\right);\qquad H_2(n)=\sum_n^2\left(\frac{-1}{\beta}\right);\qquad K(n)=\sum_n^1(-1)^{\frac{|a+c|-2}{4}}$$

toujours avec nos notations; les trois formules obtenues s'écrivent :

$$(7)\qquad H_1(8n+3)=2F(8n+3),$$

$$(8)\qquad H_2(8n+7)=2\,\underset{8n+7}{\mathrm{S}'}\left[1-(-1)^{\frac{1}{4}\mu_1}-(-1)^{\frac{1}{4}\mu_2}\right],$$

$$(9)\qquad K(4n+3)=2\,\underset{4n+3}{\mathrm{S}}(-1)^{\frac{1}{4}(m_1+m_2-m)}.$$

Opérons de même sur (2); nous trouvons une formule analogue qui s'applique aux réduites principales, de déterminant 4N et de l'ordre impropre, pour lesquelles $\frac{1}{2}(a+c)$ est impair. Introduisons alors les *semi-réduites* principales (a', b', c') et posons

$$H_{\frac{1}{2}}(n)=\sum_n^{\frac{1}{2}}\left(\frac{-1}{\beta'}\right),\qquad \beta'=2b'-|a'+c'|,$$

la somme s'étendant aux semi-réduites principales [2] (a', b', c') de déterminant n, nous aurons la relation

$$(10)\qquad H_{\frac{1}{2}}(n)=2\,\underset{4n}{\mathrm{S}}\left[1-(-1)^{\frac{m}{4}}\right].$$

J'ai déjà donné la formule (7), qui est une transformation d'un résultat d'Hermite, au Tome 158, 1914, p. 1361, des *Comptes rendus;* on peut en obtenir trois autres de même nature, en faisant $x=\frac{\pi}{4}$ dans (6), et distin-

---

(1) Ce sont celles (a, b, c), pour lesquelles $a+c$ est pair, $b>0$ et

$$(a+c)^2-4b^2<0.$$

(2) Rappelons que (a', b', c') est semi-réduite principale si $a'+c'$ est impair, $b'>0$ et $(a'+c')^2-4b'^2<0$.

guant des cas suivant la valeur de N (mod 4) :

(11) $$H_1(4n+2) = 2F(4n+2),$$

(12) $$H_2(8n+5) = 2F(8n+5),$$

(13) $$H_0(8n+1) = 2F(8n+1).$$

Dans la dernière, $H_0(8n+1)$ est la somme $\sum\left(\frac{-1}{\beta}\right)$, étendue à celles des réduites principales (a, b, c), de déterminant $8n+1$ et de l'ordre impropre, pour lesquelles $\frac{1}{2}(a+c)$ est pair.

4. Les formules (7) à (13) sont bien du type que nous avions annoncé; elles sont remarquablement simples et se traduisent élégamment en langage ordinaire; l'équation (11), par exemple, s'énonce ainsi :

Parmi les réduites principales (a, b, c), indéfinies (¹), *de déterminant* $4n+2$, *le nombre de celles où la quantité, toujours impaire,* $b - \frac{1}{2}|a+c|$ *est de la forme* $4k+1$, *diminué du nombre de celles où elle est de la forme* $4k-1$, *est égal au double du nombre des classes positives de discriminant* $4n+2$.

On a ainsi d'intéressantes relations entre certains nombres de réduites principales indéfinies de déterminant N et des nombres de réduites positives de déterminant — N. On en obtiendrait d'analogues, grâce à des formules nouvelles qui concernent la fonction numérique C d'Hermite (*loc. cit.*); par exemple :

$$K(4n) = 2(-1)^n\left[F(n) - 3F_1(n) + \mathop{\mathrm{S}}_{4n}(-1)^{\frac{m}{4}}\right];$$

le premier membre devant être augmenté de $+1$, si n est carré.

Par d'autres procédés, enfin, et en partant toujours des propriétés de nos fonctions numériques ψ, χ, ..., s, on établirait diverses équations, telles que celle-ci :

$$\sum_{4n+3}{}^{1}(-1)^{\frac{b}{2}}\left(\frac{-2}{\beta}\right) = -2\mathop{\mathrm{S}}_{4n+3}\left(\frac{2}{m_1}\right),$$

où $\left(\frac{-2}{\beta}\right)$ et $\left(\frac{2}{m_1}\right)$ sont les symboles classiques de Jacobi.

5. *Formules du second type.* — Tout d'abord, en appliquant aux seconds

---

(¹) Il est inutile d'ajouter *de l'ordre propre*, car il n'y a pas d'ordre impropre pour les déterminants $\equiv 2$ ou 3 (mod 4).

membres de (7), (11), (12), (13), certaines des formules de Kronecker, on peut en déduire, pour les premiers membres, des relations du même genre. Par exemple, si $\varphi_i(n)$ désigne la somme des diviseurs *impairs* de n, on aura ([1]), par (11) et (12),

$$H_1(4M+2) \quad + 2H_1(4M+2-2^2) + 2H_1(4M+2-4^2) + \ldots = 2\varphi_i(4M+2),$$
$$H_2(8M+6-1^2) + 2H_1(8M+6-3^2) + 2H_1(8M+6-5^2) + \ldots = \varphi_i(8M+6).$$

Ce sont des relations où les deux membres sont du type même de Kronecker; seulement $H_1(4M+2)$, par exemple, est la *différence* entre deux nombres de réduites principales de déterminant $4M+2$, au lieu d'en être la *somme*, comme le demanderait l'analogie directe. On peut obtenir, de la manière suivante, d'autres relations de même nature.

Écrivons que $B\theta\eta_1$, dont (3) fournit le développement suivant les puissances croissantes de q, est le produit, par η_1, de $B\theta$, calculé lui-même comme produit de B par θ; égalons ensuite, dans les deux membres, les coefficients de q^{2M+1} et q^{2M}, et posons, pour simplifier,

$$\Omega(n) = \Sigma'(\delta_i + \delta_p),$$

la somme s'étendant aux décompositions en facteurs $n = \delta_i \delta_p$, avec δ_i impair, δ_p pair et $\delta_i < \delta_p$; nous aurons :

$$H_1(8M+4-1^2) + H_1(8M+4-3^2) + H_1(8M+4-5^2) + \ldots = 2\varphi_i(2M+1),$$
$$H_1(8M-1^2) \quad + H_1(8M-3^2) \quad + H_1(8M-5^2) \quad + \ldots = 2\Omega(2M).$$

On aurait pu opérer de même en permutant les rôles de η_1 et de θ; passant ensuite aux semi-réduites principales, on aurait trouvé les deux formules simples :

$$H_{\frac{1}{2}}(2M+1) + 2H_{\frac{1}{2}}(2M+1-1^2) + 2H_{\frac{1}{2}}(2M+1-2^2) + \ldots = 4\varphi_i(2M+1),$$
$$H_{\frac{1}{2}}(2M) \quad + 2H_{\frac{1}{2}}(2M-1^2) \quad + 2H_{\frac{1}{2}}(2M-2^2) \quad + \ldots = 4\Omega(2M).$$

Les relations où entre le C d'Hermite donnent de même, si l'on désigne par $\rho(n)$ le nombre total de décompositions de n en une somme de deux carrés,

$$K(8M) - 2K(8M-4.1^2) + 2K(8M-4.2^2) - \ldots$$
$$= -\frac{1}{2}(-1)^M \rho(2M) + 12\varphi_i(2M) - 4\Omega(2M),$$
$$K(8M+4) - 2K(8M+4-4.1^2) + 2K(8M+4-4.2^2) - \ldots = 0.$$

([1]) Dans les premiers membres ci-après, tous du type $H_i(N-h^2)$, on donne à h les valeurs entières telles que $N-h^2$ reste positif, comme dans les formules de Kronecker.

Donnons encore cette formule, liée aux propriétés de la fonction $s_1(x)$,

$$\sum_{h=0,\pm1,\pm2,\ldots}' \sum_{8M+5-8h^2}^{1} (-1)^{\frac{2b+|a+c|+4}{8}} = -2\sum' d\left(\frac{2}{d}\right),$$

la dernière somme s'étendant aux décompositions en facteurs $8M+5=dd_1$, avec $d<d_1$.

6. Pour terminer, j'indiquerai des relations analogues, mais où les premiers membres portent sur certains *coefficients* des réduites principales, coefficients qui ne sont plus ici des unités. Posons, afin d'abréger,

$$L(n)=\sum_n^1 2\beta; \qquad P(n)=\sum_n^1 2\beta(-1)^{\frac{b}{2}};$$

nous aurons, parmi d'autres formules,

$$(14) \qquad \sum_{h=0,\pm1,\pm2,\ldots}' (-1)^h L(4N+1-4h^2) = -2(-1)^N \sum' d(d_1-d)\left(\frac{-1}{d}\right),$$

la somme, au second membre, portant sur les décompositions

$$4N+1=dd_1; \qquad d\leqq d_1;$$

puis

$$(15) \qquad \sum_{h=0,\pm1,\pm2,\ldots}' (-1)^h L(4N-4h^2) = -8\sum \delta(\delta_1-\delta)(-1)^{\frac{1}{2}(\delta_1+\delta-1)},$$

la somme, au second membre, portant sur les décompositions

$$(16) \qquad N=\delta\delta_1; \qquad \delta<\delta_1,$$

où, de plus, δ et δ_1 sont de parités contraires. Dès lors, le second membre de (15) est *nul*, si N est impair. Enfin

$$\sum_{2k+1=\pm1,\pm3,\ldots}' P(8M-(2k+1)^2) = 8\sum' \delta^2(-1)^{\frac{1}{2}(\delta+\delta_1-1)},$$

le second membre portant sur les décompositions (16), où $N=2M$.

7. Nous arrêterons là ces exemples. Ils suffisent, croyons-nous, pour confirmer l'importance, dans les applications arithmétiques, des fonctions numériques remarquables dont nous avons si souvent parlé, et aussi pour montrer l'utilité que présentait notre définition des formes indéfinies

réduites, ou semi-réduites, principales (mod 2); ces réduites, on l'a vu dans cette Note et dans la précédente, s'offrent de la manière la plus naturelle et permettent de donner un énoncé simple et élégant à des résultats d'apparence compliquée, que, sans leur secours, nous aurions dû souvent laisser dans l'ombre.

ZOOLOGIE. — *Sur certaines catégories à établir parmi les Poissons habitant les eaux douces.* Note [1] de M. **G.-A. Boulenger.**

Quand, pour l'étude de la distribution géographique, il importe de répartir les Poissons en marins et d'eau douce, une difficulté se présente du fait qu'un nombre considérable d'entre eux se rangent à la fois dans les deux catégories : tels que les Saumons et les Anguilles, selon l'époque de leur existence, certaines Truites et Epinoches dont la même espèce se divise en races les unes à vie mixte, les autres entièrement dulcaquicoles. Pour d'autres encore on a proposé une division intermédiaire, dite des *Poissons d'eau saumâtre* [2], vague et incorrecte dans son application, car beaucoup des espèces qui y sont comprises se rencontrent aussi en pleine mer et remontent les cours d'eau bien au delà de l'influence des marées, comme, par exemple, certains Bars et Muges. Même le terme *dulcaquicole* ne peut pas toujours être pris dans le sens absolu, puisque diverses espèces auxquelles il s'applique normalement peuvent s'établir dans des mers peu salées, comme la Baltique, tandis que d'autres, qui ne s'aventurent jamais au delà de l'embouchure des rivières, se sont adaptées à la vie dans des eaux dont la salure est supérieure à celle de la mer, ainsi qu'il a été constaté chez certains Cichlides d'Afrique.

La conception du véritable Poisson d'eau douce est plutôt théorique. Quand dans un groupe, famille ou sous-famille, aucun représentant n'est marin, nous sommes autorisés à conclure que ce groupe a pris son essor en eau douce; ses ancêtres peuvent avoir vécu dans la mer, peu importe, mais comme tel il a toujours été dulcaquicole et les fossiles sont souvent là pour le prouver. Je propose donc de désigner cette catégorie sous le nom de Poissons limnogènes, par opposition à tous les autres, thalassogènes. Il est important de faire cette distinction, car la dispersion des premiers

---

(1) Séance du 27 août 1917.

(2) Gunther, *Study of Fishes*, 1880, p. 251.

comparés aux seconds a été régie par des conditions toutes différentes, ainsi que le démontre leur distribution, indépendante des mers dans lesquelles se déversent les cours d'eau qu'ils habitent, mais se rattachant à la configuration des terres et des bassins hydrographiques aux périodes géologiques qui ont précédé l'époque actuelle.

Comme exemple je citerai la grande famille des Silurides, exclusivement dulcaquicoles à l'exception des deux sous-familles des Plotosinés et des Ariinés, dont les représentants sont marins et ne font que remonter certaines rivières; or ces derniers sont identiques ou très voisins sur les deux côtes de l'Atlantique, tandis que dans les autres sous-familles aucun genre n'est commum à l'ancien et au nouveau monde.

En ce qui concerne les Poissons thalassogènes représentés dans les eaux douces, trois grandes divisions s'imposent : CATAGAMES, ANAGAMES, MÉNOGAMES.

Les Catagames, qui passent une partie de leur vie en eau douce et se reproduisent en mer, et les Anagames, qui se comportent inversement, répondent aux Catadromes et Anadromes de la plupart des auteurs; mais, à la suite des objections qu'a faites G. Gilson ([1]) au sens souvent donné à ces derniers termes, qu'il réserve pour exprimer la montée et la descente d'un même poisson (migrations anadromiques ou catadromiques), j'ai proposé ([2]) de leur substituer les dénominations ci-dessus, comme plus expressives et permettant de conserver les autres dans le sens qui leur convient le mieux.

Je propose de désigner comme Ménogames ([3]) les Poissons originairement catagames ou anagames qui ont abandonné les migrations pour s'établir définitivement en eau douce, soit spontanément, soit à cause d'un emprisonnement dans des lacs autrefois en communication avec la mer. Comme exemples du premier cas, de beaucoup les plus nombreux, on peut citer le *Carcharias zambesensis*, les *Trygon* des fleuves de l'Amérique du Sud; beaucoup de Clupéides, de Truites, de Gobiides, de Pleuronectes, d'Epinoches, de Lophobranches, de Tétrodons, etc.; comme exemples du second le *Carcharias nicaraguensis*, certaines races de *Petromyzon marinus*, de *Salmo salar* et de *Cottus quadricornis*, cas fort intéressants d'adaptation forcée.

([1]) *Ann. Soc. Zool.-Malac. Belg.*, t. 43, 1908, p. 10.

([2]) *The Field*, t. 111, 1908, p. 524.

([3]) De μένω, *maneo*, et de γάμος, *nuptiæ*.

Si je suis d'accord avec la plupart des auteurs quant à l'origine des Poissons catagames et ménogames, il n'en est pas de même en ce qui concerne les Salmonides, rangés le plus souvent, par Günther entre autres, parmi les Poissons d'eau douce proprement dits, pour deux raisons apparemment : d'abord parce que ces poissons frayent en eau douce, ensuite parce que la plupart des espèces sont exclusivement dulcaquicoles. Mais alors que penser des Aloses, qui se comportent comme les Saumons et les Truites, bien qu'on s'accorde à les considérer comme d'origine marine, et des types ménogames que Günther réunissait, à l'exception des *Galaxias* et des Épinoches d'eau douce, dans sa division des Poissons d'eau saumâtre, quoique dans bien des genres les espèces soient nombreuses en eau douce et établies souvent fort loin de la mer. Ce qui me semble tendre à prouver l'origine marine des Salmonides c'est que, outre le fait qu'un certain nombre ne quittent jamais la mer et descendent même à de grandes profondeurs, la distribution de certaines espèces anagames du genre *Salmo*, dépendant des océans, contraste nettement avec celle des poissons limnogènes : ainsi le Saumon proprement dit, *S. salar*, vit à la fois en Europe et dans l'est de l'Amérique du Nord, et des espèces de la section *Oncorhynchus* sont identiques à l'est et à l'ouest de l'océan Pacifique; tout comme aux Antipodes la distribution des *Galaxias* s'explique non pas par une continuité continentale hypothétique (*Antarctis*), comme on l'a suggéré, mais par la conclusion que les espèces, aujourd'hui pour la plupart confinées dans les eaux douces, sont dérivées de formes marines, comme il en existe d'ailleurs encore [1].

Pour donner un exemple de l'application des catégories ainsi définies, j'ai dressé la liste suivante des groupes représentés dans les eaux douces de l'Afrique, dont je viens d'achever la revision [2] :

I. Thalassogènes dulcaquicoles :

A. Catagames : *Pristidæ*, *Elopidæ*, *Siluridæ* (*Plotosinæ*, *Ariinæ*), *Symbranchidæ*, *Anguillidæ*, *Scombresocidæ* (*Hemirhamphus*), *Centrarchidæ*, *Sciænidæ*, *Serranidæ* (*Morone*, *Ambassis*, *Therapon*), *Scorpididæ*, *Pristipomatidæ*, *Sparidæ*, *Carangidæ*, *Pleuronectidæ*, *Gobiidæ*, *Atherinidæ*, *Mugilidæ* (*Mugil*), *Polynemidæ*, *Sphyrænidæ*.

---

(1) Voir Boulenger, *Nature*, t. 67, 1902, p. 84.

(2) *Catalogue of the Freshwater Fishes of Africa in the British Museum*, 4 vol. 1909-1916.

B. Anagames : *Clupeidæ* (*Clupea*).

C. Ménogames : *Carchariidæ*, *Clupeidæ*, *Salmonidæ*, *Galaxiidæ*, *Scombresocidæ* (*Zenarchopterus*), *Syngnathidæ*, *Centrarchidæ*, *Serranidæ* (*Lates*, *Luciolates*), *Scorpididæ*, *Gobiidæ*, *Atherinidæ*, *Mugilidæ* (*Agonostoma*), *Gatrosteidæ*, *Blenniidæ*, *Tetrodontidæ*.

II. Limnogènes : *Polypteridæ* (*), *Lepidosirenidæ*, *Mormyridæ* (*), *Notopteridæ*, *Osteoglossidæ*, *Pantodontidæ* (*), *Phractolæmidæ* (*), *Kneriidæ* (*), *Cromeriidæ* (*), *Characinidæ*, *Cyprinidæ*, *Siluridæ*, *Cyprinodontidæ* (?), *Nandidæ*, *Cichlidæ*, *Osphromenidæ*, *Anabantidæ*, *Ophiocephalidæ*, *Mastacembelidæ* [1].

Si l'étude de la distribution des Poissons thalassogènes dulcaquicoles relève de celle de la faune marine, il en est tout autrement pour les limnogènes, ainsi que le démontre l'exemple des Silurides cité plus haut. Il s'agit de découvrir quelle est l'origine des divers types : se sont-ils formés là où ils habitent actuellement, ou ont-ils émigré, et par quelles voies, d'autres parties du monde? C'est un problème de grand intérêt, mais encore bien difficile à attaquer, vu l'imperfection des données paléontologiques, à défaut desquelles il est le plus souvent impossible de conclure; néanmoins, je me suis efforcé, il y a quelques années [2], de rassembler tous les documents qui portent sur cette question et d'en tirer parti pour spéculer sur l'origine des divers groupes de Poissons d'Afrique, à une époque où l'on discutait encore l'hypothèse d'une origine marine pour expliquer le caractère de la faune du Lac Tanganika [3].

---

(1) Les familles marquées d'un astérisque sont propres à l'Afrique.

(2) *Rep. Brit. Assoc.*, 1905, p. 412.

(3) Comme appendice à cette Note, et pour mieux fixer les idées, voici la liste des Poissons thalassogènes dulcaquicoles de France :

Catagames : *Anguilla vulgaris*, *Pleuronectes flesus*, *Mugil capito*, *M. cephalus*.

Anagames : *Petromyzon marinus*, *P. fluviatilis*, *Acipenser sturio*, *Clupea alosa*, *C. finta*, *Salmo salar*, *S. trutta*, *Coregonus oxyrhynchus*.

Ménogames : *Petromyzon Planeri*, *Salmo trutta*, *var. lacustris*, *fario*, *S. alpinus*, *var. salvelinus*, *Thymallus vulgaris*, *Coregonus lavaretus*, *C. bezola*, *Atherina mochon*, *Cottus gobio*, *Gastrosteus aculeatus*, *G. pungitius*, *Blennius frater*, *Lota vulgaris*.

CORRESPONDANCE.

MM. **Edmond Bordage**, **Gagnepain** adressent des remercîments pour les subventions qui leur ont été accordées sur le *Fonds Bonaparte* en 1917.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur la classification des points transcendants des inverses des fonctions entières ou méromorphes*. Note [1] de M. **Georges Rémoundos**, transmise par M. Hadamard.

1. Dans la thèse intéressante de M. Félix Iversen (Helsingfors, 1914), on trouve une étude approfondie et détaillée des singularités des inverses des fonctions méromorphes $u = f(z)$ avec des résultats intéressants et une classification des points transcendants de ces fonctions multiformes, fondée par M. Boutroux (*Annales de l'École Normale*, 1908) [2], et perfectionnée par M. Iversen.

Or j'ai étudié (*Ann. Fac. Sc. Toulouse*, 2e série, t. 9) les points critiques transcendants des inverses des fonctions algébroïdes (dont les fonctions entières ou méromorphes sont des cas particuliers) et donné une classification des points transcendants basée sur la densité asymptotique des branches $z = \varphi(u)$ qui tendent à l'infini lorsque le point u tend vers le point u_0 sur un chemin aboutissant à u_0.

M. Iversen considère l'ensemble (E) des déterminations de $z = \varphi(u)$ qui sont finies en u_0 [racines de $u_0 = f(z)$], selon que cet ensemble est fini ou infini, sans tenir compte des grandes variétés que peut présenter la densité asymptotique de ces racines.

Comme, dans mon travail ci-dessus cité, je me bornais au cas où $f(z)$ est d'ordre fini et que, d'autre part, j'ai pu perfectionner et généraliser ma classification, je l'exposerai ici sous une forme qui complète et précise celles de MM. Boutroux et Iversen.

---

(1) Séance du 13 août 1917.

(2) Voir aussi P. Boutroux, *Leçons sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre*, Paris, 1908, et *Sur les fonctions inverses des fonctions entières* (*Comptes rendus*, t. 145, 1907, p. 1406).

2. Pour fixer les idées, bornons-nous à une fonction entière $u = f(z)$, considérons son inverse $z = \varphi(u)$ et désignons par $\mu(r)$ un ordre de $f(z)$, qui, dans le cas de l'ordre fini, est bien déterminé et égal à un nombre constant ρ; dans le cas de l'ordre infini, $\mu(r)$ est une fonction type introduite par MM. Blumenthal [1] et Kraft pour régulariser la marche du module maximum de $f(z)$. On sait que, *en général*, la densité des racines de l'équation

$$f(z) = u \tag{1}$$

est d'ordre $\mu(r)$, c'est-à-dire que, si nous désignons par n le nombre des racines de (1) contenues à l'intérieur et sur la périphérie du cercle $|z| = r$, on a

$$n < r^{\mu(r)^{1+\varepsilon}} \tag{2}$$

à partir d'une valeur de r (pour toutes les valeurs suffisamment grandes),

$$n > r^{\mu(r)^{1-\varepsilon}} \tag{2'}$$

pour des valeurs infiniment grandes de r.

Il ne peut y avoir exception que pour deux valeurs au plus de u (l'infini compris), pour lesquelles on pourrait cesser d'avoir (2′) à partir d'une valeur de r (d'après le théorème généralisé de M. Picard) [2].

3. *Degré et ordre algébrique.* — Considérons un point u_0 du plan u et soit n_0 le nombre des racines dont le module est égal ou inférieur à r. Si, r croissant indéfiniment, n_0 reste fini, le point u_0 est nécessairement transcendant [voir ma Thèse, celle de M. Iversen (p. 23), ainsi que mon travail ci-dessus cité] pour la fonction inverse $z = \varphi(u)$, parce que la valeur u_0 sera asymptotique pour la fonction $u = f(z)$; dans ce cas, le point u_0 (point *directement critique* de MM. Boutroux et Iversen) sera dit *de degré algébrique fini* pour la fonction $z = \varphi(u)$. Si n_0 ne reste pas fini, nous dirons que *son degré algébrique est infini* et, dans ce cas, nous introduirons une autre notion, celle de l'ordre algébrique : En désignant par $\mu_0(r)$ un ordre (fonction-type) de la densité des racines de l'équation $f(z) = u_0$, nous dirons que le point u_0 est *d'ordre algébrique* $\mu_0(r)$ pour $z = \varphi(u)$, puisque

---

(1) *Principes de la théorie des fonctions entières d'ordre infini* (*Collection de monographies sur la théorie des fonctions*, publiée sous la direction de M. Émile Borel, Paris, 1910).

(2) Voir le même Livre de M. Blumenthal (Chapitre VII).

cette quantité $\mu_0(r)$ détermine la densité asymptotique des branches de $z = \varphi(u)$ qui sont finies (et, par conséquent, algébroïdes) dans le voisinage de $u = u_0$.

4. *Degré et ordre transcendant.* — Les éléments transcendants nous sont fournis par la quantité $n - n_0 = \mathrm{N}(r)$ qui se rattache [1] à la densité asymptotique des branches de $z = \varphi(u)$ qui tendent vers l'infini sur un chemin du plan u aboutissant au point u_0 et exprime, pour ainsi dire, la différence entre la densité générale des racines d'une équation $f(z) = u$ et la densité spéciale (qui peut être exceptionnelle au sens du théorème de M. Picard) des racines de l'équation $f(z) = u_0$.

Nous distinguons encore deux cas : Si la différence $n - n_0 = \mathrm{N}(r)$ reste finie, r croissant indéfiniment, nous dirons que le point u_0 est de *degré transcendant fini* pour la fonction $z = \varphi(u)$. Dans le cas contraire, il sera de degré *transcendant infini* et, alors, il est nécessaire d'introduire la notion d'ordre en posant

$$n - n_0 = r^{\nu(r)}$$

et en désignant par $\mathrm{T}(r)$ une fonction-type régularisant la marche de $\nu(r)$; nous dirons alors que le point u_0 est *d'ordre transcendant* $\mathrm{T}(r)$.

5. Les considérations et définitions ci-dessus exposées nous conduisent aux conclusions suivantes :

I. *Lorsque l'ordre algébrique d'un point u_0 est asymptotiquement inférieur à $\mu(r)^{1-\delta}$ (δ, nombre positif fixe arbitrairement petit), ce point est sûrement transcendant dont l'ordre transcendant est $\mu(r)$, c'est-à-dire : atteint le maximum. Il en est de même, à fortiori, si le degré algébrique est fini.*

II. *Tout point u_0 indirectement critique* [2] [d'après la classification de MM. Boutroux et Iversen (voir la thèse de M. Iversen, p. 46)] *est d'ordre algébrique $\mu(r)$* [*maximum*], *tandis que son degré transcendant est fini. On peut même dire que ce degré est nul dans le sens que la plus grande limite, pour $r = \infty$, de $n - n_0$ est zéro.*

III. *Il est impossible d'avoir plus de deux points transcendants* (*l'infini compris*) *d'ordre algébrique inférieur à $\mu(r)$* [*plus précisément inférieur à $\mu(r)^{1-\delta}$, δ étant un nombre positif quelconque*]. *A cette classe appartiennent les points directement critiques.*

---

[1] Thèse de M. Iversen et mon travail ci-dessus cité (p. 179).

[2] Pour toutes les portions $\varphi_\Delta(u)$ de $\varphi(u)$. [Voir la thèse de M. Iversen pour le domaine Δ et la portion $\varphi_\Delta(u)$.]

Cela est une application du théorème généralisé de M. Picard.

6. *Exemple.* — Pour la fonction $z = \varphi(u)$ définie par l'équation $u = \sin z e^{z^2}$, le point $u = 0$ est une valeur exceptionnelle et point transcendant d'ordre algébrique 1 et d'ordre transcendant 2, le point $u = \infty$ est directement critique (de degré algébrique nul).

Remarque I. — Comme le nombre n correspond à un point u, choisi, bien entendu, régulier pour la fonction $z = \varphi(u)$, la différence $n - n_0 = N(r)$ ne peut pas rester inférieure à un nombre négatif $-p$ pour une infinité de valeurs indéfiniment croissantes de r, puisque, dans le cas contraire, on aurait $n_0 - n > p$ pour des valeurs de r infiniment grandes et alors le point u serait transcendant pour $z = \varphi(u)$.

Remarque II. — La classification indiquée dans cette Note peut s'appliquer à une portion $\varphi_\Delta(u)$ de la fonction $z = \varphi(u)$ séparée des autres branches dans un cercle C de centre u_0 de la manière indiquée par M. Iversen dans sa thèse.

CHIMIE PHYSIQUE. — *Sur la classification des aciers au nickel et des aciers au manganèse.* Note [1] de M. **P. Dejean**, présentée par M. H. Le Chatelier.

Aciers au nickel. — On a l'habitude de classer les aciers au nickel, au point de vue de leurs points critiques, en deux groupes :

1° Les aciers contenant moins de 25 pour 100 de nickel pour lesquels le point critique se produit, au refroidissement, à une température généralement très différente de celle à laquelle il s'était produit au chauffage et qui sont dits *irréversibles ;*

2° Les aciers contenant plus de 25 pour 100 de nickel dont le point critique se produit sensiblement à la même température au chauffage et au refroidissement, et qui sont dits *réversibles*.

On rencontre parmi les *irréversibles* des aciers ayant des propriétés bien différentes. Les uns, jusqu'à 10 pour 100 de nickel environ, sont relativement doux ; ils sont constitués par de la ferrite et de la perlite. Les autres sont durs ; ils sont martensitiques.

Nous avons indiqué, dans une Note précédente, les relations existant

---

(1) Séance du 30 juillet 1917.

entre les points critiques A et B et les constituants micrographiques. Ces relations se trouvent vérifiées pour les aciers au nickel. Les aciers contenant moins de 10 pour 100 de nickel ne montrent que le point A et sont perlitiques. De 10 à 25 pour 100 ils n'ont que le point B et sont martensitiques. A 10 pour 100 ils ont les points A et B (*fig.* 1). Il y a donc

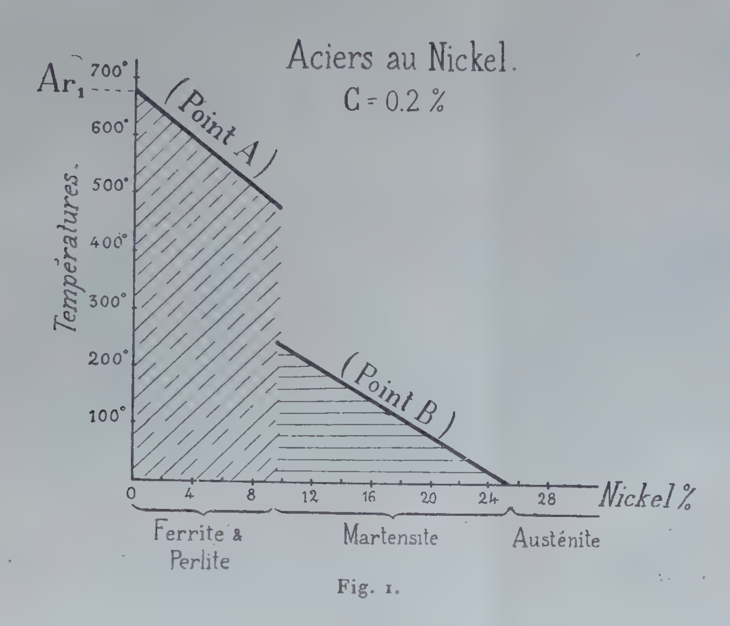


Fig. 1.

lieu de séparer les aciers dits *irréversibles* en deux classes : 1° de 0 à 10 pour 100 de nickel, les aciers perlitiques, qui sont *pseudo-* ou *quasi-réversibles;* 2° de 10 à 25 pour 100 de nickel, les aciers martensitiques qui constituent les aciers *irréversibles* à proprement parler.

C'est donc à tort que, dans les diagrammes de points critiques publiés jusqu'ici, on a figuré par une ligne continue la position des points critiques des aciers peu carburés contenant moins de 25 pour 100 de nickel.

Aciers au manganèse. — Les mêmes remarques, que nous venons de faire pour les aciers au nickel, s'appliquent intégralement aux aciers au manganèse relativement peu carburés (carbone $< 0,4$ pour 100) (*fig.* 2).

De 0 à 3,5 pour 100 de manganèse, ces aciers sont perlitiques et à point A. De 3,5 à 11 pour 100 ils sont martensitiques et à point B. En outre, de 3,5 à 4 pour 100 il existe une région intermédiaire dans laquelle les aciers possèdent les deux points A et B et sont formés de troostite et de martensite.

Pour les aciers plus carburés, de 0,7 à 1 pour 100 de carbone (*fig.* 3), la zone intermédiaire (à points A et B) prend une importance consi-

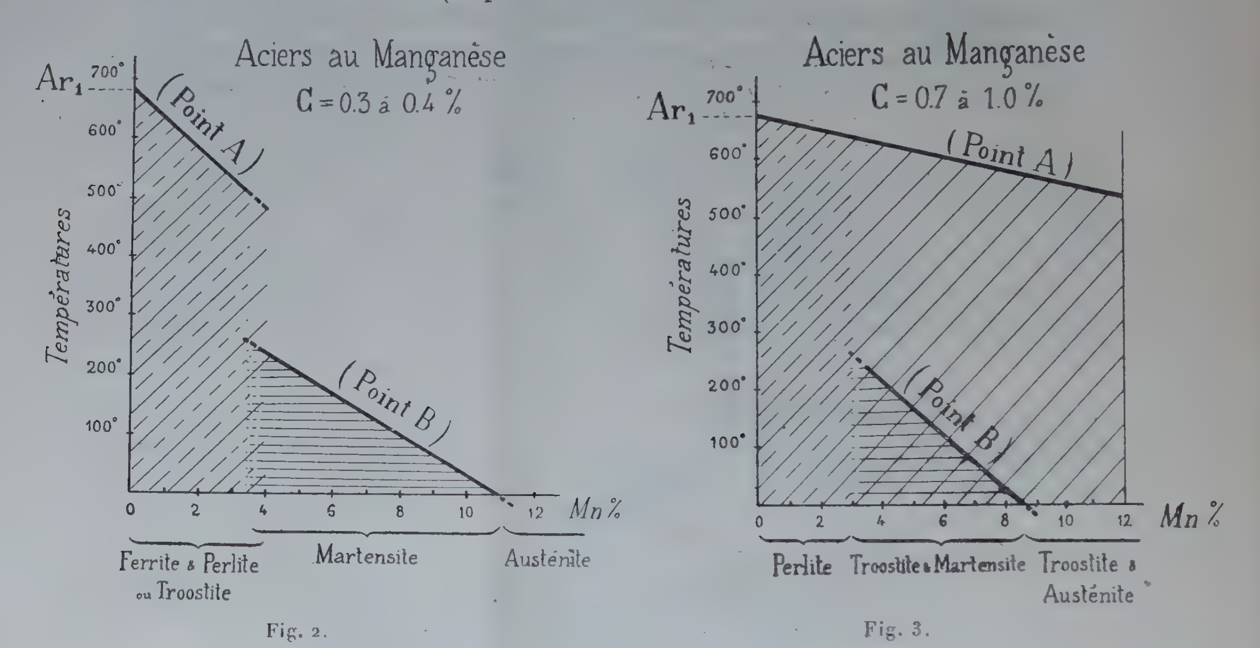


Fig. 2. Fig. 3.

dérable. A égalité de teneur en manganèse, la température du point A

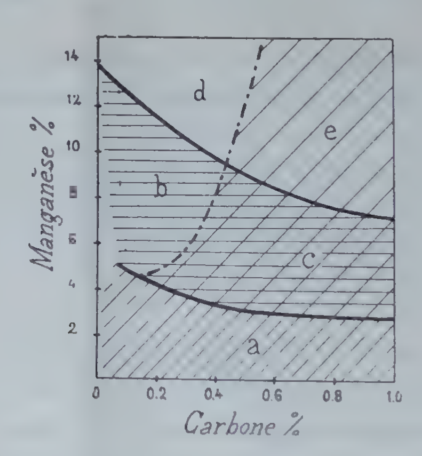


Fig. 4. — Diagramme des constituants des aciers au manganèse bien recuits : *a*, Perlite et ferrite ou cémentite; *b*. Martensite; *c*. Martensite et troostite; *d*. Austénite; *e*. Austénite et troostite.

s'élève, alors que celle du point B s'abaisse. Enfin, on peut, par des refroidissements convenables, arriver à faire produire le point A dans les aciers

pour lesquels le point B se trouve au-dessous de 0°. On obtient ainsi des aciers à troostite et austénite.

La figure 4 résume nos remarques. Elle se divise en trois sections.

Première section (*a*). — Aciers à faible teneur en manganèse (aciers à point A). Ces aciers sont perlitiques.

Deuxième section (*b*, *c*). — Pour des teneurs plus élevées en manganèse, les aciers présentent le point B. Ces aciers sont martensitiques avec ou sans troostite suivant qu'on a pu, en outre, faire produire ou non le point A.

Troisième section (*d*, *e*). — Dans les aciers à teneur encore plus élevée en manganèse, on ne peut faire apparaître le point B que par des refroidissements au-dessous de la température ordinaire. Ces aciers sont austénitiques. Ils renferment de la troostite lorsqu'on a pu faire produire le point A.

La ligne en pointillé divise le diagramme en deux parties :

1° La partie située à droite et en bas de cette ligne (régions *a*, *c*, *e*) est celle des aciers susceptibles de donner le point A (perlite ou troostite);

2° Les régions *b* et *d* dans lesquelles il est presque impossible de faire produire le point A (aciers martensitiques ou austénitiques sans troostite).

INDUSTRIE. — *Sur l'exploitation économique des tourbes de Châteauneuf-sur-Rance* (*Ille-et-Vilaine*). Note [1] de MM. **C. Galaine**, **C. Lenormand** et **C. Houlbert**, présentée par M. Edmond Perrier.

M. Eckenberg, de Londres, a démontré qu'une tourbe chauffée sous pression, à une température supérieure à 150° C., perd sa consistance gélatineuse et peut être ensuite facilement séchée par compression. Pour des raisons purement techniques, le procédé Eckenberg n'a pu recevoir, jusqu'à ce jour, d'application industrielle; le produit qu'il fournit possède cependant des propriétés fort intéressantes; ce n'est plus la tourbe : c'est une substance nouvelle à laquelle, pour la commodité de notre exposé, nous donnons le nom de *tourbon;* voici ses principales propriétés :

1° Le pouvoir calorifique du *tourbon* est supérieur d'environ 10 pour 100 à celui de la tourbe simplement desséchée et peut atteindre 6500 cal-kg; c'est un demi-coke.

(1) Séance du 27 août 1917.

2° L'hydrocellulose étant détruite par le passage à l'autoclave, le *tourbon* ne reprend plus l'humidité après dessiccation.

3° Nous avons constaté que le *tourbon*, obtenu avec les tourbes de Châteauneuf, était tout particulièrement riche en produits volatils. Voici, à titre d'exemple, une moyenne d'analyses effectuées à l'usine à gaz, à l'École nationale d'Agriculture et à l'École de Médecine et de Pharmacie de Rennes :

	Pour 100.
Matières volatiles	61,3
Cendres	3,1
Charbon fixe	36,6

Ces chiffres se rapportent au tourbon anhydre.

Encouragés par ces résultats, voici comment nous avons réalisé la préparation économique du tourbon :

Au lieu de prendre les tourbes naturelles à 85 ou 90 pour 100, nous enlevons d'abord, par un pressurage à froid, la plus grande quantité d'eau possible. Les nouvelles presses continues (syst. Mabille, Aurep, etc.), donnant des pressions atteignant facilement 50^{kg} à 100^{kg} par centimètre carré, permettent d'obtenir des briquettes ne renfermant plus que 60 pour 100 d'eau. Nous partons de ces briquettes. Après les avoir placées sur des chariots, en couches séparées par des claies, nous les introduisons dans des autoclaves horizontaux chauffés pendant 25 minutes, *par la vapeur*, à 160°.

Au sortir des autoclaves, la tourbe cuite peut être une deuxième fois passée dans les presses, mais cette opération n'est pas nécessaire. Débarrassé de la matière gélatineuse, le produit sèche rapidement, soit à l'air libre, mieux encore dans des couloirs chauffés par les gaz du foyer.

Récupération de la chaleur. — Nous récupérons la plus grande partie de la chaleur perdue en disposant les autoclaves en batteries, par couples, et en les reliant par une tuyauterie appropriée, de manière à pouvoir utiliser successivement la vapeur de détente et l'eau chaude condensée au fond de chacun d'eux. Le calcul qui suit justifie l'économie du procédé.

Pour simplifier les calculs, nous admettons que la chaleur spécifique de la tourbe brute est égale à celle de l'eau; nous nous tenons toujours ainsi dans des conditions moins avantageuses que les conditions réelles.

Imaginons 100^{kg} de tourbe dans notre autoclave, pour porter ces 100^{kg} de tourbe à 160°, il faudra produire

$$160 \times 100 = 16000^{cal}.$$

La chaleur de vaporisation de l'eau, à cette température, étant de 494^{cal}, il nous

faudra donc employer

$$\frac{16000}{494} = 32^{\text{kg}},5 \text{ de vapeur.}$$

D'autre part, on sait que, pratiquement, 1^{kg} d'un charbon fournissant 6500^{cal} [1] est capable de vaporiser 6^{kg} d'eau environ; il nous faudra donc, *en charbon*, pour vaporiser nos $32^{\text{kg}},5$ d'eau dans les conditions indiquées :

$$\frac{32,5}{6} = 5^{\text{kg}},4.$$

Or, comme nos 100^{kg} de matière première contenaient 40 pour 100 de charbon (nous sommes partis d'une tourbe-briquette à 60 pour 100 d'eau); avec un seul autoclave, pour une dépense de $5^{\text{kg}},4$, on obtiendra donc 40^{kg} de charbon; la dépense sera

$$\frac{5,4}{40} = \frac{1}{7} \text{ approximativement;}$$

le rendement, environ 87 pour 100.

Par l'emploi d'un deuxième autoclave, *nous récupérerons une partie de l'énergie dépensée* et *nous augmenterons le rendement*.

Établissons la communication du premier autoclave (dans lequel la tourbe est chauffée à 160°), avec un deuxième chargé de briquettes; nos $32^{\text{kg}},5$ de vapeur à 160° feront un apport de

$$32,5 \times 160 = 5200^{\text{cal}}.$$

Mais, du fait de la détente (dans le premier autoclave), l'eau qui imprègne la tourbe va s'échapper; et, dans le temps qu'il faut à cet autoclave pour passer de 160° à 100°, un nouveau contingent de calories va encore passer dans le second, soit

$$60° \times 100 = 6000^{\text{cal}}.$$

La récupération théorique totale sera donc

$$5200 + 6000 = 11\,200^{\text{cal}}.$$

Comme il nous faut aussi, d'après le calcul primitif, dans le deuxième autoclave, 16000^{cal}, la quantité de charbon dépensé sera donc réduite dans la proportion de $\frac{11\,200 \times 5,4}{16000}$, c'est-à-dire à $3^{\text{kg}},7$.

La dépense définitive, avec deux autoclaves en batterie, sera donc

$$\frac{3,7}{40} = \frac{1}{11} \qquad \left(\text{au lieu de } \frac{1}{7}\right),$$

le rendement aura monté à 91 pour 100.

---

(1) Ce sont là, à peu près, les caractéristiques de notre tourbon.

Cela signifie que chaque kilogramme de charbon brûlé, dans le générateur, nous fournira 11^{kg} de tourbon.

On voit clairement que si nous étions partis d'une tourbe contenant 70 pour 100 d'eau, ce qui est très facile à obtenir par la compression, la dépense théorique, dans les mêmes conditions, serait

$$\frac{3,7}{30} = \frac{1}{8,1} \qquad \text{(rendement 88 pour 100).}$$

Industriellement, ce résultat serait encore fort intéressant.

Conclusions. — Le procédé que nous venons de décrire permet donc d'obtenir un produit spécial, le *tourbon*, dont nous avons déjà indiqué les propriétés. Ce produit, qu'on peut amener facilement, par la dessiccation à l'air libre, à ne plus renfermer que 20 à 25 pour 100 d'eau, peut, dans ces conditions, être utilisé tel quel :

1° Aux lieu et place du bois dans les usages domestiques;

2° Dans les gazogènes pour les moteurs à gaz pauvre;

3° Dans la distillation pour l'utilisation des gaz combustibles et des sous-produits (*sulfate d'ammoniaque, alcool méthylique, coke*, etc.).

L'exploitation peut se faire en marche continue, hiver comme été, avec un personnel restreint.

GÉOLOGIE. — *Essai d'explication de quelques particularités dans la tectonique du système alpin.* Note posthume de M. **Albert Cochain**, présentée par M. Pierre Termier.

J'ai, dans une Note précédente [1], tenté d'expliquer, par la naissance en profondeur de deux *bandes de flexion* rectangulaires, le dessin général des plissements alpins, la symétrie approchée des lignes de ce dessin par rapport à un centre situé vers le milieu de l'Apennin, enfin l'existence, sur chacun des arcs, d'une tendance au déversement vers l'extérieur. Il est clair que si tout, dans les deux bandes de flexion, était parfaitement symétrique, la figure dessinée par les lignes directrices des plis serait, à chaque instant, une sorte de trèfle à quatre feuilles, symétrique par rapport aux axes des bandes de flexion (*fig.* 1).

La figure réelle étant fort différente, il existe certainement quelque dissy-

---

[1] Albert Cochain, *Comptes rendus*, t. 165, 1917, p. 240.

métrie dans la cause : soit prédominance de l'une des flexions sur l'autre ; soit existence, dans chacune des bandes, d'un sens de propagation de la flexion ; soit enfin défaut de synchronisme dans la propagation de la flexion le long des deux bandes. On peut supposer que la flexion est particulièrement énergique dans la bande qui a une direction voisine de Est-Ouest (bande de Karpinsky) ; et aussi que, dans la bande rhénane, la flexion vient du Sud, et qu'elle vient de l'Est dans l'autre bande.

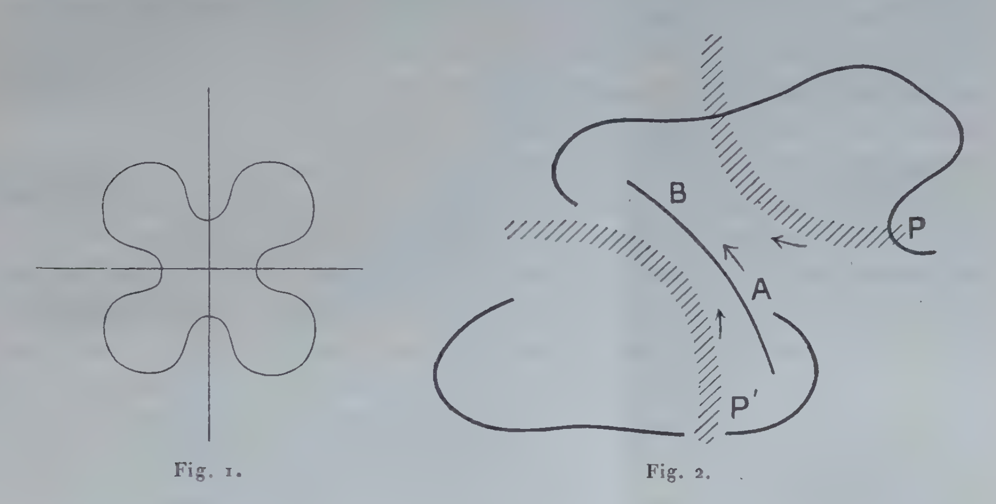


Fig. 1. Fig. 2.

Considérons donc les deux zones P et P′ de l'écorce résistante, et la flexion, par conséquent la surélévation, se propageant, dans ces zones, suivant les flèches. Entre les deux zones de surélévation, une aire d'affaissement A prendra naissance, qui, à mesure que les flexions vont se propager vers l'Ouest et le Nord, se propagera, elle, vers le Nord-Ouest. Cette aire fera naturellement dévier les deux bandes de flexion : P vers le Nord, P′ vers l'Ouest. Les deux bandes de flexion ne peuvent passer au point B, intersection géométrique de leurs axes, qui se trouvera, au contraire, dans la région affaissée ; et, par suite de la déviation progressive de P vers le Nord, de P′ vers l'Ouest, l'ensemble des deux bandes de flexion finira par affecter la forme d'une hyperbole équilatère (*fig.* 2).

Dans la zone affaissée comprise entre les deux branches de l'hyperbole, le rapprochement des deux branches donnera naissance à des plissements, donc à une chaîne de montagnes. *Cette chaîne, ce sera l'Apennin :* elle serait symétrique, avec des charriages en éventail, si les flexions étaient d'égale énergie ; elle sera, en réalité, dissymétrique, avec charriages dirigés vers le Nord-Est, parce que la flexion est plus énergique dans la zone P que dans

la zone P′. Si, postérieurement à la formation de cette chaîne, les bandes de flexion y pénètrent, elles y détermineront des effondrements : ce seront les effondrements tyrrhéniens et toscans.

L'Apennin se termine au Nord par les plissements des collines de Turin, manifestant ainsi son indépendance vis-à-vis de l'arc alpin et sa nature différente. Au Sud, les faits sont moins clairs. On retrouve cependant la symétrie avec le Nord en admettant que l'Apennin, en tant qu'unité tectonique, se termine en Ombrie et dans le Latium. Le reste de la péninsule italienne, à partir des Abruzzes et des monts Lepini, serait attribué à l'arc calabro-sicilien; et l'Apennin se perdrait ainsi au Sud à l'intérieur de ce dernier arc, comme il se perd au Nord à l'intérieur de l'arc alpin.

Quant au *plissement en retour* des Alpes piémontaises (plis déversés vers l'Est), c'est, de toute évidence, un phénomène postérieur à la formation des grands charriages de l'arc alpin. On peut l'expliquer en imaginant que, par suite d'un déplacement des bandes de flexion, la partie méridionale des Alpes s'est trouvée, à un certain moment, comprise dans l'angle Sud-Est des deux bandes de flexion, alors qu'elle avait été d'abord comprise dans leur angle Nord-Ouest : d'où un changement de sens dans le déversement des plis, donnant à l'ensemble des Alpes franco-italiennes une allure en éventail.

La chaîne des Balkans est symétrique des Alpes de Transylvanie par rapport à la plaine roumaine; le plissement y est dirigé vers le Nord et le Nord-Est. Tout se passe comme si l'axe de la bande de Karpinsky (zone P de la figure) correspondait à la plaine roumaine. Si la symétrie par rapport à cet axe eût été parfaite, les Balkans se seraient raccordés, par un arc montagneux analogue à celui des Carpathes, aux charriages de Sicile et de Tunisie. Les causes énoncées plus haut, qui ont amené la naissance de l'Apennin, ont empêché ce raccordement. *Les Balkans sont*, à mes yeux, *l'amorce septentrionale d'un large arc montagneux symétrique des Carpathes, dont la partie méridionale, l'arc sicilo-tunisien, a été déviée par l'Apennin vers le centre du système.*

Les Pyrénées sont symétriques des Balkans; mais leur cas est plus complexe. Elles montrent des poussées dirigées vers le Nord, et d'autres dirigées vers le Sud. Elles se raccordent nettement avec les Alpes par les charriages provençaux, tandis que le raccordement avec les Baléares, qu'exigerait la symétrie avec les Balkans, est à peine amorcé.

Il est naturel d'attribuer la formation des Pyrénées, dans ce qu'elles ont de symétrique avec les Balkans, à une cause analogue à celle qui a produit

ces derniers; c'est-à-dire de les considérer, en ce qui concerne les mouvements dirigés vers le Sud seulement, comme *l'amorce d'un large arc montagneux symétrique de l'arc de Gibraltar, dont la partie septentrionale a été déviée par l'Apennin vers le centre du système alpin pour former l'arc alpin lui-même*. Cette manière de voir implique que l'axe de la branche occidentale de l'hyperbole des flexions ait passé entre les Pyrénées et les Baléares à l'époque où se sont produits les charriages vers le Sud. Le fait que ces charriages sont limités en étendue conduit à penser que leur cause a eu une durée également limitée. Les charriages pyrénéens dirigés vers le Sud ont été interrompus dans leur développement par le déplacement de la bande de flexion qui était leur cause immédiate; et cette interruption s'est produite avant qu'ils se fussent raccordés aux charriages des Baléares. Les charriages du versant septentrional, dirigés vers le Nord, ont pris naissance à une époque où la bande de flexion passait au nord des Pyrénées : à ce moment-là, les Pyrénées et la chaîne provençale étaient une seule et même chaîne, où tous les plis se couchaient au Nord.

MÉTÉOROLOGIE. — *Hiver 1917 : Halos et arc-en-ciel.* Note de M. **Jean Mascart**, présentée par M. B. Baillaud.

L'hiver 1916-1917 fut tardif et très froid dans la région lyonnaise : on peut dire que l'automne eut une longueur anormale tandis que, au contraire, le printemps fut supprimé.

L'automne s'est prolongé, en quelque sorte, jusqu'au 15 janvier, décembre ayant été plutôt doux et la première quinzaine de janvier chaude. Sauf deux courtes périodes relativement douces (18-23 février et 10-14 mars), la température est restée constamment inférieure à la normale, du 15 janvier au 28 avril.

Le froid fut très rigoureux du 24 janvier au 11 février, et particulièrement du 30 janvier au 4 février : la moyenne diurne de ces six jours consécutifs est de $-10^\circ,8$; le minimum absolu s'est produit le 4 février avec $-18^\circ,4$ et, à notre station du Parc de la Tête d'Or (Lyon), on notait le même jour -21°.

Cet hiver exceptionnel, long et rigoureux, correspondait à un *maximum* des taches solaires; *la lune rousse* venait contredire à la croyance populaire; *les saints de glace*, les 11, 12 et 13 mai, se trouvaient être des journées particulièrement chaudes; plus généralement, l'été succédait sans transition

à l'hiver puisque le froid s'est prolongé jusqu'aux derniers jours d'avril et que la première quinzaine de mai se présente très chaude, avec une moyenne thermique qui atteint la moyenne normale du mois de juin.

Depuis l'origine des observations régulières à Saint-Genis-Laval (juillet 1880), le thermomètre accuse, *une seule fois*, une température inférieure à celle du 4 février 1917 : le 17 janvier 1893, avec $-19^\circ,3$; ce jour-là, on note -25° au parc de la Tête d'Or.

Les hivers les plus froids depuis 1880 ont été :

	Minimum absolu.		
1890-1891......	—16,8	le 19 janvier	(hiver très long : novembre à avril)
1892-1893......	—19,3	le 17 »	(hiver court)
1904-1905......	—14,6	le 3 »	(hiver court)
1908-1909......	—14,0	le 1 »	(hiver de durée normale)

On voit que les hivers très froids ont jusqu'alors leur minimum dans la première ou la seconde décade de janvier. Les froids rigoureux de 1917 se sont produits relativement tard et l'on pouvait espérer que l'hiver serait court : il n'en fut rien.

Le carnet du temps de l'Observatoire de Lyon mentionne, par contre, pour l'hiver et le printemps, un très grand nombre d'observations de phénomènes optiques, arcs-en-ciel, halos, parhélies, etc., et nous croyons devoir appeler l'attention sur les deux observations des 29 mars et 29 avril (notation en temps moyen local).

1917 MARS 29. — *Saint-Genis-Laval.* — A 8^h, vent W modéré; ciel uniformément couvert de nimbus; pellicule de neige sur le sol; visibilité des Alpes.

A $9^h,6$ une neige fine commence à tomber; les flocons grossissent de plus en plus et atteignent leur maximum entre $11^h,5$ et $11^h,8$; à $12^h,2$ la neige s'arrête, le vent a tourné SSE très faible. Des éclaircies apparaissent vers 15^h-16^h; fracto-cumulus et cirrus de WNW.

A 16^h, arc tangent circumzénithal. A $16^h\,30^m$ on observe le grand halo, le halo ordinaire, un parhélie; l'arc tangent est très brillant.

A 18^h, couvert; cirro-stratus, cumulus et alto-cumulus de WNW; vent S modéré : journée froide.

Mont Pilat. — Neige la nuit, $2^{mm},8$; givre; nimbus, brume, brouillard sur la plaine; couvert avec légère brise de W; minimum $-4^\circ,0$; neige fine à $11^h,30$ ($1^{mm},4$).

1917 AVRIL 29. — *Saint-Genis-Laval.* — A 8^h, beau, forte brume à E; dès 12^h, il semble s'annoncer un changement de temps, un ou deux cirrus vers E et quelques stratus à l'horizon SW; les cirro-stratus gagnent et sont assez étendus à 18^h, au moment où apparaissent quelques cumulus à W. Très belle journée, chaude, ensoleillée; un peu de brise toute la journée. Halo solaire à $15^h\,20^m$; Halo lunaire à $21^h\,40^m$.

Mont-Pilat. — Le même jour, un observateur de la Commission météorologique de la Loire, M. Tranchand, qui fait des observations excellentes et assez complètes sur le Mont-Pilat (altitude 1360^m), notait : temps chaud, 13°,8 à 12^h; cirrus venant de W; régime général de vent modéré, 3^m à 4^m, entre SE et S; brume sur la plaine. Alpes visibles.

Mais en outre, de 12^h à 14^h, M. Tranchand notait autour du Soleil une apparence fort exceptionnelle de halo présentant *toutes* les couleurs de l'arc-en-ciel. La mesure angulaire ne fut pas effectuée, malheureusement, par l'observateur et, *a posteriori*, d'après ses souvenirs, on peut établir que le cercle était beaucoup plus grand que celui du halo ordinaire (22°), moins grand cependant que celui du grand halo (46°).

S'agit-il du troisième arc-en-ciel, *direct*, pour des rayons faisant environ 41° avec la ligne de visée du Soleil? Noté quand l'observateur est au sommet du brouillard et non, à proprement parler, par temps de pluie : la chose est très probable sans être certaine.

Les arcs de troisième et de quatrième ordre, avec des gouttes placées entre le Soleil et l'observateur, supposent des conditions particulièrement rares pour que toute la lumière ne soit pas interceptée : on admet généralement que les colorations correspondantes sont faibles. Il serait à souhaiter que l'on fît une liste des observations de ces phénomènes exceptionnels, et les remarques de notre excellent collaborateur pourraient alors trouver leur place naturelle dans cette monographie.

HYGIÈNE ALIMENTAIRE. — *De l'utilisation du Marron d'Inde.* Note (¹) de M. A. Goris, présentée par M. Roux.

Au cours de recherches déjà lointaines sur la composition chimique du Marronnier d'Inde (*Æsculus Hippocastanum* L.) nous avions été amené à envisager l'utilisation possible des différentes parties de cet arbre (²).

Dans cette Note nous laisserons de côté tout ce qui concerne l'emploi du bois ou de l'écorce pour ne retenir que l'importance du fruit comme ressource alimentaire. Nombreux sont les savants qui se sont occupés de cette

(¹) Séance du 27 août 1917.

(²) A. Goris, *Sur la localisation de l'esculine et du tanin dans le Marronnier* (*Comptes rendus*, t. 136, 1903, p. 902); *Thèse de Doctorat ès Sciences*, Paris, 1903. — A. Goris et L. Crété, *Sur l'huile de marron d'Inde* (*Bull. Sc. pharmacol.*, t. 14, 1907, p. 68.

question [1] et qui n'ont pu donner une solution pratique à leurs recherches de laboratoire. Nous-même n'avions pas cru devoir publier nos résultats parce que l'enquête économique à laquelle nous nous étions livré avec M. Ch. Lacourte nous avait conduit à conclure que l'emploi du marron d'Inde ne pouvait être rémunérateur à cause des frais de main-d'œuvre et de transport.

Si cette Note n'a pas le mérite d'une grande nouveauté, elle a du moins celui de l'actualité; nous ne serions pas revenu sur des faits que nous n'avions pas cru devoir publier il y a quinze ans, si la question de l'emploi du marron d'Inde ne se posait à nouveau comme il y a quelque cent ans (Parmentier, 1771).

Le marron d'Inde est une graine entourée d'un tégument de couleur spéciale bien connue et composée uniquement de deux cotylédons intimement soudés et d'une radicule logée dans une dépression de la graine. Il n'y a pas d'albumen.

Le tégument renferme de l'esculine et un tanin particulier : l'acide esculitannique. Il n'a aucune valeur économique. Par contre, il est gênant pour un traitement éventuel de la graine. A l'état frais, il s'enlève assez facilement, mais dans la graine séchée il est très adhérent à la masse cotylédonaire; il rend le broyage assez difficultueux et ses débris se trouvent mêlés à la farine.

La partie cotylédonaire sèche renferme :

Matières grasses.................	2 à 3 pour 100
Matières azotées.................	6 à 7 »
Amidon........................	20 à 30 »

avec substances amères du groupe des saponines et substance colorante.

On n'y trouve, contrairement à l'opinion de certains auteurs : ni esculine, ni tanin; ceux-ci appartiennent exclusivement au tégument.

L'huile ne présente pas un bien grand intérêt. La proportion en est trop faible pour légitimer une extraction industrielle; d'ailleurs elle est difficile à extraire du marron frais. Elle forme en effet, grâce à la saponine, une émulsion si tenace que les solvants ordinaires des matières grasses n'arrivent pas à la dissoudre.

---

(1) Bon (1720), Marcandier (1757), Parmentier (1771), Baumé (pluviose an V), Juge de Saint-Martin (1822), Vergnault-Romagnési (1826), Pottier (1836), Mottet (1837), Couverchel (1846), Salesse (1845), Chevalier (1848), Flandin (1849), Calmus (1850), Lepage (1856), de Callias (1857), Ad. Thibierge et Remilly (1857).

Les saponines ne peuvent avoir un intérêt industriel que comme substance aphrogène. On peut les isoler au besoin du marron *frais*. Pendant la dessiccation ou la fermentation ces substances s'altèrent considérablement sans disparaître tout à fait; le traitement par les solvants devient alors possible.

A un autre point de vue, ces saponines ont une action physiologique intense qui donne aux préparations médicamenteuses du marron d'Inde leur action spécifique dans les états congestifs du système veineux (hémorroïdes, varices, phlébites, pousse du cheval). Ces propriétés pharmaceutiques, comme leur amertume, s'opposent surtout à l'utilisation du marron d'Inde.

L'emploi de la pulpe ou de la farine est donc impossible sans un traitement préalable destiné à enlever ces substances. On a préconisé pour cela divers traitements : l'épuisement à l'alcool (*Baumé*), les lavages à l'eau simple (*Parmentier*, *Baumé*), alcaline (*Pottier*, *Flandin*), acide (*Vergnaud-Romagnési*).

Sans entrer dans le détail de toutes les expériences faites à ce sujet, nous pouvons dire que nos essais personnels nous ont fait donner la préférence aux lavages à l'eau acide. Nous avions employé l'eau chlorhydrique au $\frac{1}{1000}$, mais il est évident qu'un autre acide pourrait remplir le même but.

Le traitement est plus rapide que le traitement à l'eau pure, moins coûteux que l'emploi de l'alcool. Il donne une farine plus blanche que les lavages à l'eau alcaline. On peut de cette façon obtenir au laboratoire 20 à 25 pour 100 d'une belle farine blanche sans goût, ni odeur. Les grains d'amidon sont irréguliers : les uns petits, arrondis ou ovoïdes; d'autres volumineux, piriformes ou elliptiques, à hile linéaire ou étoilé fortement visible et placé dans la partie la plus large du grain. Stries peu visibles.

On peut s'assurer que les saponines sont enlevées des eaux de lavages en recherchant soit leurs propriétés biologiques (hémolyse des globules rouges), soit leurs propriétés physiologiques (action stupéfiante sur les poissons).

Cette farine pourrait être utilisée à la préparation de l'alcool et même pour l'alimentation. Il existe au Musée de l'École de Pharmacie des pâtes alimentaires préparées avec cette farine. D'ailleurs il y eut autrefois, aux environs de Paris, des féculeries installées pour le traitement du marron d'Inde (De Callias). Elles ne purent réussir pour les raisons économiques que nous avons indiquées plus haut.

Le résidu de l'extraction de l'amidon, le tourteau, après traitement, est également dépourvu d'amertume; il pourrait très vraisemblablement encore servir de nourriture pour le bétail.

M. Sidney A. Reeve adresse une Note en langue anglaise intitulée : *La valeur absolue de l'entropie.*

M. F. Hesselgren adresse un Mémoire sur la gamme musicale instrumentale. (Renvoyé à l'examen de M. Saint-Saëns.)

La séance est levée à 15 heures trois quarts.

E. P.